15 + 13 + 15 + 11 + 15 + 7 = 76

8½

Afdeling Wiskunde en Informatica R.U.G.

Naam:	Studentnummer:	Bladnr.: 1 van 3
Adres:	Studierichting:	Tentamen: Discrete Structuren
Postcode en		Datum: 8/2/2005
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent: Renardel (denk ik)...

opgave 1: a) $\neg(p \wedge ((q \leftrightarrow r) \rightarrow r))$

15

~~$\Leftrightarrow \neg(p \wedge [\neg(q \leftrightarrow r) \vee r])$ implication (10a)~~

~~$\Leftrightarrow \neg(p \wedge [\neg\{(q \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow q)\} \vee r])$ equivalence (13)~~

~~$\Leftrightarrow \neg(p \wedge [\neg\{(\neg q \vee r) \wedge (r \rightarrow q)\} \vee r])$ implication (10a)~~

~~$\Leftrightarrow \neg(p \wedge [\neg\{(\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee q)\} \vee r])$ implication (10a)~~

~~$\Leftrightarrow \neg(p \wedge [\{\neg(\neg q \vee r) \vee \neg(\neg r \vee q)\} \vee r])$ De Morgan (8b)~~

wel netjes

~~$\Leftrightarrow \neg(p \wedge [\{(\neg\neg q \wedge \neg r) \vee (\neg\neg r \wedge \neg q)\} \vee r])$ De Morgan (twee keer) (8a)~~

~~$\Leftrightarrow \neg(p \wedge [\{(q \wedge \neg r) \vee (r \wedge \neg q)\} \vee r])$ double negation (twee keer) (1).~~

~~$\Leftrightarrow \neg p \vee \neg[\{(q \wedge \neg r) \vee (r \wedge \neg q)\} \vee r]$ De Morgan (8b).~~

~~$\Leftrightarrow \neg p \vee [\neg\{(q \wedge \neg r) \vee (r \wedge \neg q)\} \wedge \neg r]$ De Morgan (8a).~~

~~$\Leftrightarrow \neg p \vee [\{\neg(q \wedge \neg r) \wedge \neg(r \wedge \neg q)\} \wedge \neg r]$ De Morgan (8a).~~

~~$\Leftrightarrow \neg p \vee [\{(\neg q \vee \neg\neg r) \wedge (\neg r \vee \neg\neg q)\} \wedge \neg r]$ De Morgan (twee keer) (8b)~~

~~$\Leftrightarrow \neg p \vee [\{(\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee q)\} \wedge \neg r]$ double negation (twee keer) (1)~~

$\neg(p \wedge ((q \leftrightarrow r) \rightarrow r))$

$\Leftrightarrow \neg p \vee \neg[(q \leftrightarrow r) \rightarrow r]$ De Morgan (8b)

Handje aan de vorm van het GLB document.

$\Leftrightarrow \neg p \vee \neg[\neg\{(q \leftrightarrow r) \wedge \neg r\}]$ implication (10b).

$\Leftrightarrow \neg p \vee [(q \leftrightarrow r) \wedge \neg r]$ double negation (1).

$\Leftrightarrow \neg p \vee [\{(q \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow q)\} \wedge \neg r]$ equivalence (13).

$\Leftrightarrow \neg p \vee [\{(\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee q)\} \wedge \neg r]$ implication (twee keer) (10a).

$\Leftrightarrow \neg p \vee [\{(\neg q \vee r) \wedge \neg r\} \wedge (\neg r \vee q)]$ commutative (2b)

ok

$\Leftrightarrow \neg p \vee [\{(\neg q \wedge \neg r) \vee (r \wedge \neg r)\} \wedge (\neg r \vee q)]$ distributive (3b)

Hint: met regel 2g (absorptie) gaat dit veel sneller.

$\Leftrightarrow \neg p \vee [\{(\neg q \wedge \neg r) \vee 0\} \wedge (\neg r \vee q)]$ (7b).

$\Leftrightarrow \neg p \vee [(\neg q \wedge \neg r) \wedge (\neg r \vee q)]$ identity (6a).

$\Leftrightarrow \neg p \vee [\neg r \wedge \{\neg q \wedge (\neg r \vee q)\}]$ commutative (2b).

$\Leftrightarrow \neg p \vee [\neg r \wedge \{(\neg q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge q)\}]$ distributive (4b).

$\Leftrightarrow \neg p \vee [\neg r \wedge \{(\neg q \wedge \neg r) \vee 0\}]$ (7b)

$\Leftrightarrow \neg p \vee [\neg r \wedge (\neg q \wedge \neg r)]$ identity (6a).

$\Leftrightarrow \neg p \vee [(\neg r \wedge \neg r) \wedge \neg q]$ commutative (2b).

$\Leftrightarrow \neg p \vee (\neg r \wedge \neg q)$ idempotent laws (5b).

dus $\neg(p \wedge ((q \leftrightarrow r) \rightarrow r)) \Longleftrightarrow \neg p \vee (\neg r \wedge \neg q)$.

1).b). $p \vee (q \wedge r \wedge \neg q)$

$\Leftrightarrow p \vee [(q \wedge \neg q) \wedge r]$ commutativity (2b).

$\Leftrightarrow p \vee [0 \wedge r]$ (7b) (ik kan niet tegelijk waar en niet waar zijn)

$\Leftrightarrow p \vee [0]$ identity (6c).

$\Leftrightarrow p$ identity (6a).

$\underline{p \vee (q \wedge r \wedge \neg q) \Leftrightarrow p}$

- $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q)$

~~$\Leftrightarrow (p \vee p) \wedge (p \vee q) \wedge (q \vee p) \wedge (q \vee q) \wedge (r \vee p) \wedge (r \vee q)$ distribution (4a).~~

~~$\Leftrightarrow p \wedge (p \vee q) \wedge (q \vee p) \wedge q \wedge (r \vee p) \wedge (r \vee q)$ idempotent law (5a).~~

~~$\Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge (p \vee q) \wedge (p \vee q) \wedge (q \vee p) \wedge (r \vee q)$ commutativity (2a/2b).~~

~~$\Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge (p \vee q) \wedge (r \vee p) \wedge (r \vee q)$ idempotent law (5b).~~

$\Leftrightarrow \{(p \wedge q) \wedge r\} \vee \{(p \wedge q)\}$

$\Leftrightarrow \{(p \wedge q)\} \vee \{(p \wedge q) \wedge r\}$ commutativity (2a).

$\Leftrightarrow (p \wedge q)$ absorptie (29b).

$\underline{(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p \wedge q}$

- $(p \wedge \neg q) \vee q$

$\Leftrightarrow q \vee (p \wedge \neg q)$ commutativity (2a).

$\Leftrightarrow (q \vee p) \wedge (q \vee \neg q)$ distributive (4a).

$\Leftrightarrow (q \vee p) \wedge 1$ (7a).

$\Leftrightarrow q \vee p$ identity (6d).

$\underline{(p \wedge \neg q) \vee q \Leftrightarrow q \vee p}$

- $\{(p \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg r)\} \vee q$

~~$\Leftrightarrow (p \vee \neg p) \wedge (\neg r \vee \neg p) \wedge (p \vee \neg r) \wedge (\neg r \vee \neg r) \vee q$ distributive (4a).~~

~~$\Leftrightarrow 1 \wedge (\neg r \vee \neg p) \wedge (p \vee \neg r) \wedge (\neg r \vee \neg r) \vee q$ (7a).~~

~~$\Leftrightarrow (\neg r \vee \neg p) \wedge (p \vee \neg r) \wedge (\neg r \vee \neg r) \vee q$ identity (6d).~~

~~$\Leftrightarrow (\neg r \vee \neg p) \wedge (p \vee \neg r) \wedge \neg r \vee q$~~

$\Leftrightarrow \{\neg r \wedge (p \vee \neg p)\} \vee q$ distributive (4b).

$\Leftrightarrow \{\neg r \wedge 1\} \vee q$ (7a)

Afdeling Wiskunde en Informatica R.U.G.

Naam:	Studentnummer:	Bladnr.: 2 v.d. 3
Adres:	Studierichting:	Tentamen:
Postcode en		Datum:
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent:

te bewijzen: $x \in \mathbb{Q}$ en $y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

opgave 2: het product xy is irrationaal als $x \neq 0$, ~~x rationaal en~~

Bewijs: als $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$ dan zijn er $p_1, q_1 \in \mathbb{Z} - \{0\}$ met $x = \frac{p_1}{q_1}$ en y is irrationaal, dus $y \neq \frac{p_2}{q_2}$ voor elke $p_2 q_2 \in \mathbb{N}$.

(13)

$xy = \frac{p_1 y}{q_1}$ ~~met $q_1 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ maar $p_1 y \notin \mathbb{N} \setminus \{0\}$~~

stel $xy = \frac{p_3}{q_3} = \frac{p_1 y}{q_1}$ met $p_3 q_3 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

dan geldt $\frac{p_3 q_1}{q_3 p_1} = y \in \mathbb{Q}$ want $p_3, q_1, q_3, p_1 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

maar dit is tegenspraak want we hadden aangenomen dat y irrationaal was, dus moet de aannname dat xy te schrijven is als $\frac{p_3}{q_3}$ onjuist zijn, dus xy is irrationaal. OK

opgave 3: a). propositie p is invariant van de loop while g do S als geldt dat als p true is ~~[illegible]~~ voordat we door de while loop zijn gegaan, p daarna ook nog true is.

(13)

3) b). $m+n=5$ voor de loop.

while $0<n$ do

$m = m+n$ (dus $m_1 = m+n$)

$n = m-n$ (dus $n_1 = m_1 - n = m+n-n = m$)

$m = m-n$ (dus $m_2 = m_1 - n_1 = m+n-m = n$)

nu moeten we zien of $n_1 + m_2$ nog steeds 5 is:

$n_1 + m_2 = m + n = 5$

opgave 4: a) Eulercircuit: een gesloten pad in G die elke 'edge' in G ~~slechts~~ precies een maal gebruikt

(11) 2

Eulerpad: een pad in G die elke 'edge' in G ~~slechts~~ precies een maal gebruikt.

4.b). C(G): elke 'vertex' van de graaf heeft een even graad, dwz vanaf elk punt zijn er een even aantal 'edges'.

3

V en de graaf is samenhangend

4).c). Als G een Eulercircuit bevat, dan is er dus een gesloten pad in G die alle 'edges' bij langs gaat. Dat betekent dus dat we in elke 'vertex' moeten aankomen en vertrekken. (minstens een maal). Stel er is een 'vertex' met oneven graad. Dan zijn er twee mogelijkheden: of we beginnen het circuit in dat punt of niet. Zo ja, dan zien we dat als we er weg zijn gegaan met een 'edge', dat er dan nog een even aantal 'edges' overblijven naar die vertex die nog ongebruikt zijn. Dezen kunnen we alleen opmaken door middel van paren van ~~{vertrekken, aankomen}~~ {aankomen, vertrekken}. Dat betekent dat we dus nooit kunnen eindigen in dit punt, dus dat we geen 'circuit' kunnen afleggen. Het bewijs voor als we niet in dat punt met oneven orde beginnen, is haast hetzelfde. Stel we zijn aangekomen bij een punt met oneven orde, dan zijn er nog een even aantal 'edges' naar dat punt over. die kunnen we alleen opmaken in paren van {vertrekken, aankomen}, dus dat betekent dat we altijd terug moeten keren naar dat punt totdat de 'edges' er naartoe op zijn en we moeten dus stoppen in dat punt. We komen dus niet terug bij het beginpunt, waarvan we hadden aangenomen dat dit het niet was.

6

8

Afdeling Wiskunde en Informatica R.U.G.

Naam:	Studentnummer:	Bladnr.: 3 v.d. 3
Adres:	Studierichting:	Tentamen:
Postcode en		Datum:
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent:

opgave 5: a). halve opteller:

15

x	y	c	s
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Boole'se functie: $C = x \wedge y$

$S = x \oplus y = (x \vee y) \wedge \neg (x \wedge y)$

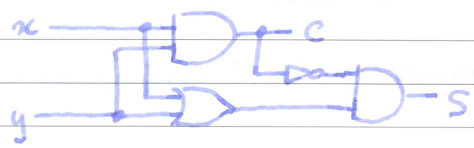
gehele opteller:

x	y	z	c	s
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

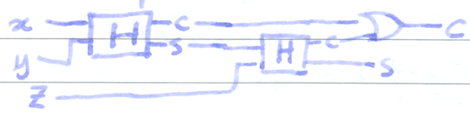
Boole'se functie: $C = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z)$

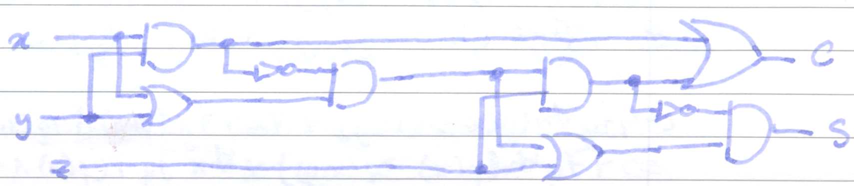
$S = \{\neg\{(x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z)\} \wedge (x \vee y \vee z)\} \vee (x \wedge y \wedge z)$.

5)b).  AND poort,  OR poort  NOT poort



5).c). stel halve opteller is 





opgave 6 : a) $\forall x\,(p(x) \rightarrow \exists y\, q(x,y)) \Rightarrow \exists y\, \forall x\, (p(x) \rightarrow q(x,y))$

7   0   stel we kunnen voor x en y 0 of 1 invoeren en stel de outputs zijn dan:

x	y	$p(x)$	$q(x,y)$
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	0	1

dus $p(x) \equiv (x=0)$
$q(x,y) \equiv (x=1)$

/

dan zien we dat LHS true is: voor elke x (0 of 1) bestaat er een y zodanig dat $p(x) \rightarrow q(x,y)$.
maar ~~de~~ wat RHS staat is false: voor alle y is het zo dat er een x bestaat zodanig dat $p(x) \rightarrow q(x,y)$ false is: als $y=0$ dan laat $x=0$ dat zien en met $y=1$ en $x=1$ idem ditto.

$\exists y\, \forall x\,(x=0 \rightarrow x=1)$ is onwaar

6. b). bewijs $\exists y\, \forall x\,(p(x) \rightarrow q(x,y)) \rightarrow \forall x\,(p(x) \rightarrow \exists y\, q(x,y))$

7

~~$\Leftrightarrow \neg\{\exists y\, \forall x\,(p(x) \rightarrow q(x,y)) \vee \forall x\,(p(x) \rightarrow \exists y\, q(x,y))$ implication (10a)~~
~~$\Leftrightarrow \neg\{\exists y\, \forall x\,(p(x) \rightarrow q(x,y))\} \vee \{\forall x\,(\neg p(x) \vee \exists y\, q(x,y))\}$ implication (10a)~~

~~$\Leftrightarrow \neg\{\exists y\, \forall x\,(p(x) \rightarrow q(x,y))\} \vee \{$~~

10b
$\Leftrightarrow \neg\{\exists y\, \forall x\,(p(x) \rightarrow q(x,y)) \wedge \neg \forall x\,(p(x) \rightarrow \exists y\, q(x,y))\}$ implication (1g)

$\Leftrightarrow \neg\{\exists y\, \forall x\,(p(x) \rightarrow q(x,y)) \wedge \exists x\, \neg(p(x) \rightarrow \exists y\, q(x,y))\}$ De Morgan (35a)
$\Leftrightarrow \neg\{\exists y\, \forall x\,(p(x) \rightarrow q(x,y)) \wedge \exists x\, \neg(\neg p(x) \vee \exists y\, q(x,y))\}$ implication (10a).
$\Leftrightarrow \neg\{\exists y\, \forall x\,(p(x) \rightarrow q(x,y)) \wedge \exists x\,(p(x) \wedge \neg \exists y\, q(x,y))\}$ De Morgan (8a).
$\Leftrightarrow \neg \exists y\, \forall x\,(p(x) \rightarrow q(x,y)) \vee \neg \exists x\,(p(x) \wedge \neg \exists y\, q(x,y))$ De Morgan (8b).
$\Leftrightarrow \neg \exists y\, \forall x\,(p(x) \rightarrow q(x,y)) \vee \forall x\, \neg(p(x) \wedge \neg \exists y\, q(x,y))$ De Morgan (35b).
$\Leftrightarrow \neg \exists y\, \forall x\,(p(x) \rightarrow q(x,y)) \vee \forall x\, \neg(p(x) \wedge \forall y\, \neg q(x,y))$ De Morgan. (35b).
$\Leftrightarrow \neg \exists y\, \forall x\,(p(x) \rightarrow q(x,y)) \vee \forall x\, \neg(\forall y\, p(x) \wedge \forall y\, \neg q(x,y))$ loze kwantificatie (39)

onsluiting

$\Leftrightarrow \neg \exists y\, \forall x\,(p(x) \rightarrow q(x,y)) \vee \forall x\, \neg \forall y\,(p(x) \wedge \neg q(x,y))$ (33a).
$\Leftrightarrow \neg \exists y\, \forall x\,(p(x) \rightarrow q(x,y)) \vee \forall x\, \exists y\, \neg(p(x) \wedge \neg q(x,y))$ De Morgan (35a).
$\Leftrightarrow \neg \exists y\, \forall x\,(p(x) \rightarrow q(x,y)) \vee \forall x\, \exists y\,(\neg p(x) \vee q(x,y))$ De Morgan (8b).